Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια 10

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

20 - 6 - 2012

Άσκηση 1. *Να βρεθούν οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής*

$$\mathsf{q} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathsf{q}(x,y,z) = xy + yz$$

Λύση. *Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής* q *είναι*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Έχουμε:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (\lambda^2 - \frac{1}{4}) + \frac{\lambda}{4}$$

$$= -\lambda \cdot (\lambda^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = -\lambda \cdot (\lambda^2 - \frac{1}{2}) = -\lambda \cdot (\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot (\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ πολλαπλότητας ένα.

- *Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(0)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y = 0 \\ \\ z = -x \end{cases}$$

και άρα

$$\mathcal{V}(0) = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = 0 \ \textit{ και } \ z = -x \Big\} = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \Big\}$$

$$= \Big\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \Big\} \implies \mathcal{V}(0) = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Υπολογίζουμε: $\|(1,0,-1)\| = \sqrt{2}$. Τότε το σύνολο

$$\textit{ΟΚΒ}: \ \Big\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Big\}$$

αποτελεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{V}(0)$.

- *Για τον ιδιόχωρο* $\mathcal{V}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ *έχουμε το ομεγενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

Από τη πρώτη εξίσωση έχουμε $y = \sqrt{2}x$ *και αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε:* $x - \sqrt{2}\sqrt{2}x + z = 0 \Rightarrow x = z$. *Συνεπώς*

$$\mathcal{V}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = \sqrt{2}x \ \text{ και } \ x = z \Big\} = \Big\{ \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2}x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \Big\}$$

$$= \Big\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x \in \mathbb{R} \Big\} \implies \mathcal{V}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

Έχουμε $\|(1, \sqrt{2}, 1)\| = 2$ *και άρα μια ορθοκανονική βάση του* $\mathcal{V}\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$ *είναι το σύνολο:*

$$\mathsf{OKB}: \ \Big\{ \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Big\}$$

- *Για τον ιδιόχωρο* $\mathcal{V}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ *έχουμε το ομεγενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ \\ z = x \end{cases}$$

Τότε

$$\mathcal{V}\big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Big\rangle \implies \mathsf{OKB}: \ \Big\{ \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Big\}$$

Επομένως οι κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q *είναι*

$$\Big\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Big\}$$

ή ως διανύσματα του $\mathbb{R}^3$, *οι κύριοι άξονες της* q *είναι:*

$$\Big\{ \vec{\epsilon}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \ 0, \ -\frac{1}{\sqrt{2}}), \quad \vec{\epsilon}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}), \quad \vec{\epsilon}_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) \Big\}$$

Τέλος η τετραγωνική μορφή q *στους κύριους άξονες γράφεται ως εξής:*

$$\mathsf{q}(x', y', z') = \frac{\sqrt{2}}{2}(y')^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(z')^2 \qquad \square$$